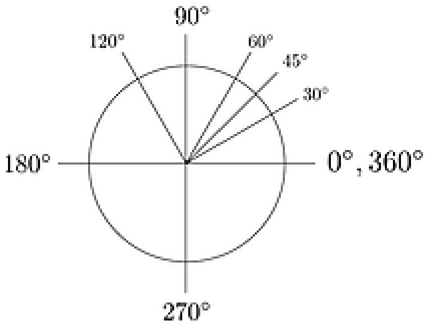
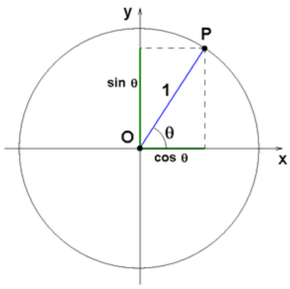
PARAGRAAF 14.0 : EENHEIDSCIRKEL

DE EENHEIDSCIRKEL MET GRADEN

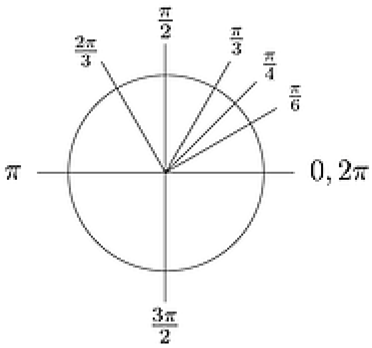




DEFINITIES

- Eenheidscirkel = { Cirkel met middelpunt O en straal 1 }
- $\sin(\theta) = \frac{y\text{−}coordinaat}{1} \rightarrow y = \sin(\theta)$

DE EENHEIDSCIRKEL MET RADIALEN



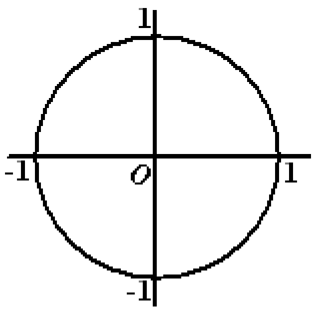
DEFINITIES RADIALEN

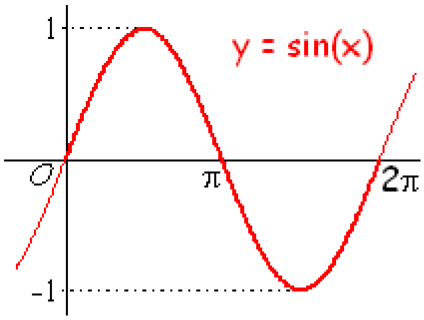
- Radiaal = { Afstand (in cm) die iemand heeft afgelegd als hij over de rand van de cirkel loopt }
- De omtrek van de cirkel = 2π· r = 2π · 1 = 2π
- 2π rad = 360 graden → π rad = 180 graden

DE GRAFIEK VAN $y = sin(x)$

De grafiek van $y = sin(x)$ kun je uit de eenheidscirkel halen :

$y = sin\ (x)$ (de y-coördinaat in de eenheidscirkel)



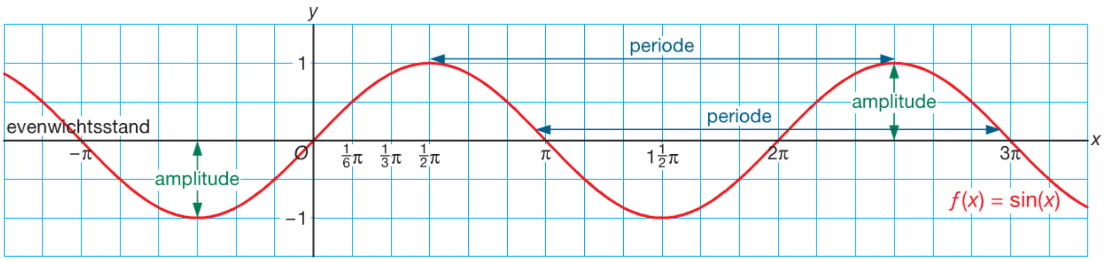


PARAGRAAF 14.1 : SINUSOÏDEN

LES 1 : TEKENEN VAN EEN GONIOFORMULE

DEFINITIE

Gegeven is gonioformule $y = a + b \sin c\,(x - d)$



Hierin is:

(1) a = evenwichtsstand

(2) b = amplitude

(3) $c = \frac{2\pi}{periode}$ $\quad of \quad periode = \frac{2\pi}{c}$

(4) d = verschuiving met

$x + d$ = verschuiving d naar links

$x - d$ = verschuiving d naar rechts

STAPPENPLAN TEKENEN GONIO-FORMULE $y = a + b \sin c\,(x - d)$

(1) Teken eerst de formule $y = a + b \sin cx$ (dus zonder verschuiving d)

(2) Verschuif de eerste grafiek d naar links / rechts

VOORBEELD 1

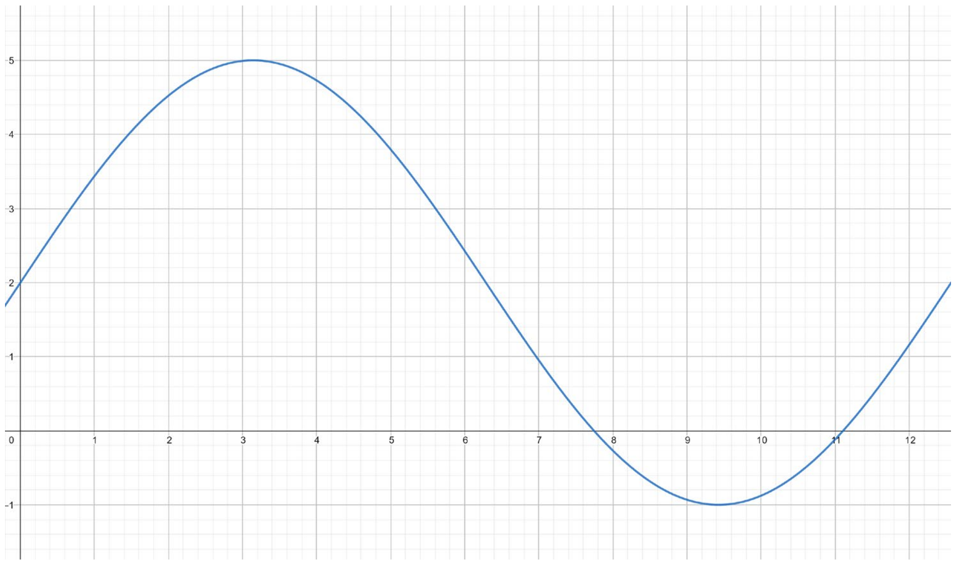
Teken op domein [0 , 2π] de formule $f(x) = 2 + 3sin\frac{1}{2}(x - 1)$

OPLOSSING 1

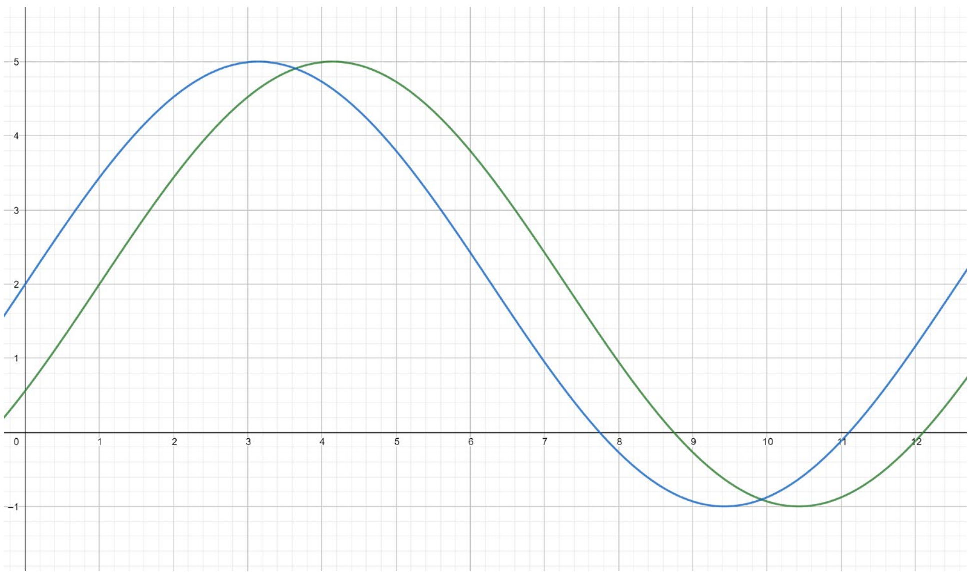
a. (1) $a = evenwichtsstand = -2$

$b = amplitude = 3$

$periode = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \ (\approx 12{,}57)$

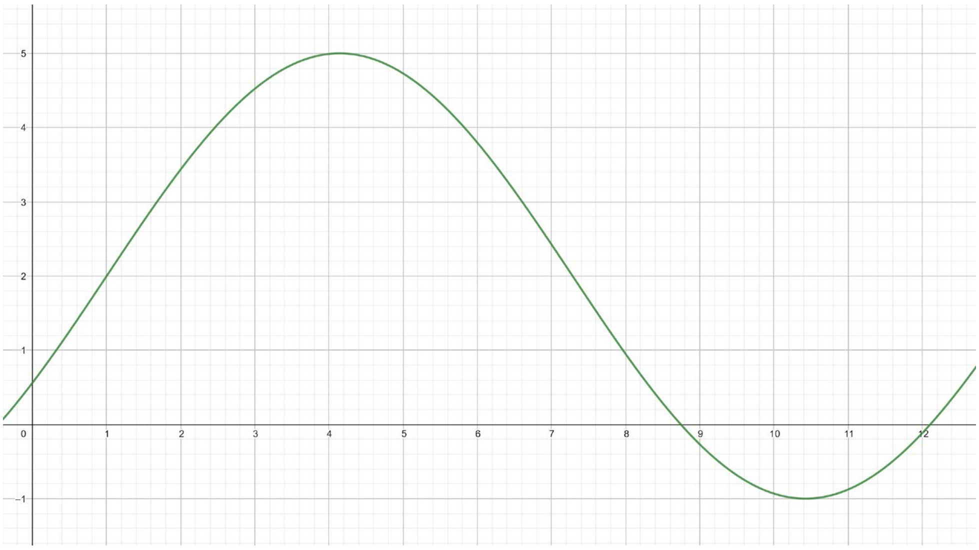


(2) -1 = verschuiving 1 naar links



OPMERKING

Je kunt ook direct de grafiek tekenen. Je moet dan als start van de grafiek het punt $(verschuiving, evenwichtsstand) = (1{,}2)$ nemen voor de sinusgrafiek.

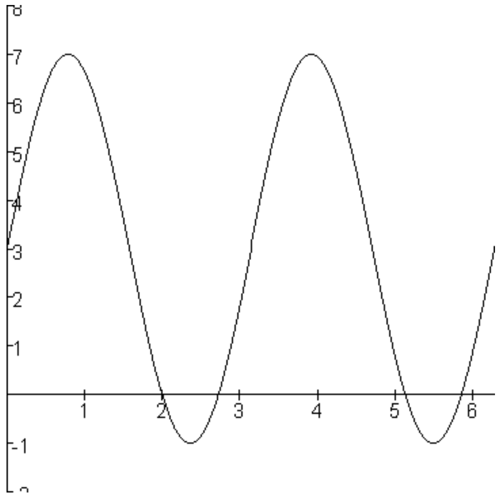


PARAGRAAF 14.2 : FORMULES VAN SINUSOÏDEN OPSTELLEN

LES 1 BEPALEN VAN EEN GONIOFORMULE

VOORBEELD 1

a. Bepaal de formule van de grafiek.
b. Bereken zonder de GR het maximum en het minimum.
c. Bereken de helling in x = 1.
d. Bereken de maximale helling.
e. Bereken de minimale helling.



OPLOSSING 1

a. Begint in de evenwichtsstand dus vandaar een sinusfunctie, want dan heb je geen verschuiving nodig.

(1) a = evenwichtsstand $= \frac{7+-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

(2) b = amplitude $= 7 - 3 = 4$

(3) periode = 4 – 1 = 3 (Van top tot top) dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

(4) Bij de sinusgrafiek start in de evenwichtsstand en dat doet deze grafiek ook dus d=0.

Dus $\boldsymbol{y = 3 + 4sin\,(\frac{2}{3}\pi x)}$

b. Maximum = evenwichtsstand + amplitude = a + b = 3 + 4 = 7
Minimum = evenwichtsstand – amplitude = a – b = 3 – 4 = –1.

c. $Y_1 = 3 + 4sin\,(\frac{2}{3}\pi x)$

calc > dy/dx > x=1

helling = -4,19

d. De helling is maximaal als de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat !!

Dat is bij x = 0. Dus

$Y_1 = 3 + 4sin\,(\frac{2}{3}\pi x)$

calc > dy/dx > x=0

helling = 8,38

e. De helling is minimaal als de grafiek door de evenwichtsstand omlaag gaat !!

(1) Bereken het snijpunt van de formule met de evenwichtsstand (y=3) waar de grafiek OMLAAG gaat ;

$Y_1 = 3 + 4si\,n\left(\frac{2}{3}\pi x\right)\; en\; Y_2 = 3$

calc > intersect

x=1,5

(2) Bereken de helling in dit punt (In dit geval x=1,5707963)

$Y_1 = 3 + 4sin\,(\frac{2}{3}\pi x)$

calc > dy/dx > x=1,5

helling = -8,38

PARAGRAAF 14.3 : RIJEN BIJ FIGUREN

DEFINITIE

Er zijn twee soorten rijen die vaak terugkomen

1. Rekenkundige rij = { Iedere keer een getal erbij tellen }
2. Meetkundige rij = { Iedere keer met een getal vermenigvuldigen }

REKENKUNDIGE RIJ

(1) De recursievergelijking : $u(n) = u(n-1) + v$, waarbij v een getal is.

(2) De directe formule : $u(n) = u_0 + n \cdot v$.

MEETKUNDIGE RIJ

(1) De recursievergelijking : $u(n) = r \cdot u(n-1)$, waarbij r een getal is.

(2) De directe formule : $u(n) = u_0 \cdot r^n$.

SOMRIJ

$$S_n = \{\, Som\ van\ de\ eerste\ (n+1)\ termen\ van\ de\ rij\ u \,\} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

VOORBEELD 1

Gegeven is de recursievergelijking u(n) = u(n-1) + 4 en u(0) = 9

a. Bereken $\sum_{i=0}^{3} u_i$

b. Bepaal de som van de eerste 12 termen.

OPLOSSING 1

a. $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 9 + 13 + 17 + 21 = 60$

b.

(1) De eerste 12 getallen is u(0) t/m u(11) !!
Dus we moeten S_{11} berekenen.

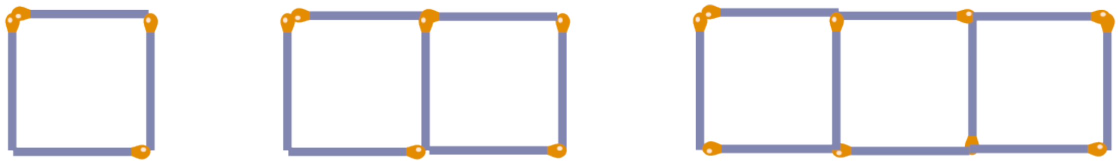
(2) De GR gebruiken. Je hebt twee recursievergelijkingen nodig :
nMin = 0
u(n) = u(n-1) + 4
u(nMin) = 9

v(n) = v(n-1) + u(n-1) + 4 { v(n-1) + de recursievgl van u(n) }
v(nMin) = 9 { v(0) = u(0) = 9 }

Table : v(11) = 372

VOORBEELD 2

Gegeven zijn de volgende 3 figuren van een rij.



1 2 3

We kijken naar het totaal aantal lucifers van deze figuren (T).
Er geldt dus $T_1 = 4$; $T_2 = 7$; $T_3 = 10$.

Het totaal aantal lucifers wordt berekend door het aantal lucifers in de lengte (L) en het aantal lucifers dat omhoog ligt (H).
Er geldt bijvoorbeeld dat $L_2 = 4$ en $H_2 = 3$.

a. Stel een directe formule op van L_n en H_n.

b. Stel een directe formule en een recursievergelijking op van T_n.

Je kunt m.b.v. de formules van L_n en H_n ook een nieuwe formule maken. We definiëren $O_n = L_n \times H_n$.

c. Stel een directe formule op van O_n .

d. Stel een recursievergelijking op van O_n .

OPLOSSING 2

a. $H_1 = 2$ $H_2 = 3$ $H_3 = 4$ > $H_n = n + 1$
$L_1 = 2$ $L_2 = 4$ $L_3 = 6$ > $L_n = 2n$

b. $T_n = H_n + L_n = 2n + n + 1 = 3n + 2$
$T_{n-1} = 3(n - 1) + 2 = 3n - 3 + 2 = 3n - 1$
$T_n - T_{n-1} = 3n + 2 - (3n - 1) = 3n + 2 - 3n + 1 = 3$

Dus
$T_n = T_{n-1} + 3$
$T_1 = L_1 + H_1 = 2 + 2 = 4$

c. $O_n = L_n \times H_n = 2n \times (n + 1) = 2n^2 + n$

d. $O_{n-1} = 2(n - 1)^2 + n - 1 = 2(n^2 - 2n + 1) + n - 1$.
$O_{n-1} = 2n^2 - 4n + 2 + n - 1 = 2n^2 - 3n + 1$

$O_n - O_{n-1} = 2n^2 + n - (2n^2 - 3n + 1) = 2n^2 + n - 2n^2 + 3n - 1$
$O_n - O_{n-1} = 4n - 1$
Dus
$O_n = O_{n-1} + 4n - 1$
$O_1 = L_1 \times H_1 = 2 \times 2 = 4$

PARAGRAAF 14.4 : VARIABELEN VRIJMAKEN

LES 1 GEBROKEN FORMULES OMWERKEN

Formules omwerken → kruiselings vermenigvuldigen of 2 = $\frac{6}{3}$

VOORBEELD 1

a. Maak x vrij bij de formule $y = 3x^{-3,2}$.

b. Maak x vrij bij de formule $y = 5(2x+1)^3$

c. Maak x vrij bij de formule $y = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x-1}$.

OPLOSSING 1

Draai de formule eerst om :

a. $3x^{-3,2} = y$

$x^{-3,2} = y$

$x = y^{\frac{1}{-3,2}} = y^{-0,3125}$

b. $5(2x+1)^3 = \mathrm{y}$

$(2x+1)^3 = \frac{1}{5}y$

$2x+1 = (0,2y)^{\frac{1}{3}}$

$2x+1 = (0,2)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$

$2x+1 = 0,585 \cdot \sqrt[3]{y}$

$2x = 0,585 \cdot \sqrt[3]{y} - 1$

$2x = 0,292 \cdot \sqrt[3]{y} - 0,5$

c. $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x-1} = y$

$\sqrt[4]{x-1} = 2y$

$x - 1 = (2y)^4$

$x - 1 = (2)^4 \cdot (y)^4$

$x - 1 = 16 \cdot y^4$

$x = 16 \cdot y^4 + 1$

VOORBEELD 2

a. Gegeven is $y = \frac{2}{5x-1}$.

Druk x uit in y.

b. Gegeven is $A = 8 - \frac{8}{T+2}$.

Schrijf T als functie van A.

c. Gegeven is $A = \frac{p+3}{p-1}$.

Schrijf p als functie van A.

d. Gegeven is $Z = \frac{10T+20}{3} \cdot 15 + 7$.

Schrijf deze formule in de vorm $Z = aT + b$

OPLOSSING 2

a. $\frac{y}{1} = \frac{2}{5x-1}$ (kruiselings)

$y(5x-1) = 2 \cdot 1$

$5x - 1 = \frac{2}{y}$

$5x = \frac{2}{y} + 1$

$x = \frac{2}{5y} + \frac{1}{5}$

OF

$y = \frac{2}{5x-1}$ (makkelijk sommetje bijv. $2 = \frac{6}{3}$)

$5x - 1 = \frac{2}{y}$

$5x = \frac{2}{y} + 1$

$x = \frac{2}{5y} + \frac{1}{5}$

b. $A - 8 = -\frac{8}{T+2}$

$-A + 8 = \frac{8}{T+2}$ $\{ y = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{6}{y}$

$T + 2 = \frac{8}{-A+8}$

$T = \frac{8}{-A+8} - 2$

c. $\frac{A}{1} = \frac{p+3}{p-1}$

$A(p-1) = 1 \cdot (p+3)$

$Ap - A = p + 3$

$Ap - p = A + 3$

$p(A-1) = A + 3$

$p = \frac{A+3}{A-1}$

d. $Z = \frac{10T+20}{3} \cdot \frac{15}{1} + 7 = \frac{150T+300}{3} + 7$

$Z = \frac{150T}{3} + \frac{300}{3} + 7 = 50T + 100 + 7$

$Z = 50T + 107$

LES 2 : COMBINEREN VAN FORMULES MET MEERDERE LETTERS

VOORBEELD 1

Gegeven zijn $y = 10p + 2$ en $p = -5x + 4$.

a. Neem $x = 2$ en bereken y.

b. Druk y uit in x.

Gegeven is ook de formule $Q = y \cdot p$.

c. Schrijf Q als functie van p.

d. Druk Q uit in x.

OPLOSSING 1

a. $p = -5 \cdot 2 + 4 = -6$

$y = 10 \cdot -6 + 2 = -58$

b. $y = 10p + 2 =$

$y = 10 \cdot (-5x + 4) + 2 =$

$y = -50x + 40 + 2$

$y = -50x + 42$

c. $Q = y \cdot p = (10p + 2) \cdot p$

$Q = 10p^2 + 2p$

d. $Q = y \cdot p = (-50x + 42)(-5x + 4)$

$Q = 250x^2 - 210x - 200x + 168 = 250x^2 - 410x + 168$

LES 3 : VAN MACHT NAAR LOG EN OMGEKEERD

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 regels zijn :

(1) ${}^{g}log\ (a) + {}^{g}log\ (b) = {}^{g}log\ (a \cdot b)$

(2) ${}^{g}log\ (a) - {}^{g}log\ (b) = {}^{g}log\ (\frac{a}{b})$

(3) ${}^{g}log\left(a^k\right) = k \cdot {}^{g}log(a)$

(4) ${}^{g}log(g)^t = t$

VOORBEELD 1

Schrijf de volgende formules als of als

a. Schrijf de formule $y = 5 \cdot 2^{3t+8}$ als $log(y) = at + b$

b. Schrijf de formule als $t = d + c\ ln(y)$.

Gegeven is ook de formule $y = 10 \cdot x^{2,3}$

c. Schrijf deze formule als $log(y) = p + q \cdot log(x)$

OPLOSSING 1

a. $y = 5 \cdot 2^{3t} \cdot 2^8$

$y = 5 \cdot (2^3)^t \cdot 256$

$y = 1280 \cdot 8^t$

$log(y) = log(1280 \cdot 8^t)$

$log(y) = log(1280) + log(8^t)$

$log(y) = log(1280) + t \cdot log(8)$

$log(y) = 3{,}11 + t \cdot 0{,}90$

$log(y) = 0{,}90t + 3{,}11$

of $log(y) = log(5 \cdot 2^{3t+8})$

$log(y) = log(5) + log(2^{3t+8})$

$log(y) = log(5) + (3t+8) \times log(2)$

$log(y) = 0{,}69897 + (3t+8) \times 0{,}301..$

$log(y) = 0{,}70 + 0{,}90t + 2{,}41$

$log(y) = 0{,}90t + 3{,}11$

b. $ln(y) = ln(5 \cdot 2^{3t+8})$

$ln(y) = ln(5) + ln(2^{3t+8})$

$ln(y) = ln(5) + (3t+8) \times ln(2)$

$ln(y) = 1{,}609.. + (3t+8) \times 0{,}693..$

$ln(y) = 1{,}61 + 2{,}08t + 5{,}55$

$ln(y) - 7{,}16 = 2{,}08t$

$0{,}48ln(y) - 3{,}44 = t$ $\rightarrow t = 0{,}48ln(y) - 3{,}44$

c. $y = 10 \cdot x^{2,3}$

$log(y) = log(10 \cdot x^{2,3})$

$log(y) = log(10) + log(x^{2,3})$

$log\ (y) = log(10) + 2{,}3 \cdot log(x)$

$log\ (y) = 1 + 2{,}3 \cdot log(x)$

PARAGRAAF 14.5 : OMVORMEN EXPONENTEN EN LOGARITMEN

VOORBEELD 1

a. Schrijf de formule $y = 9 \cdot 2^t$ om in de vorm $y = b \cdot 10^{ct}$

b. Schrijf de formule $y = 0{,}25 \cdot ln(3t)$ om in de vorm van een logaritme met grondtal 10

OPLOSSING 1

a. $9 \cdot 2^t = 9 \cdot (10^c)^t$

$2 = 10^c$

$c = {}^{10}log(2) = 0{,}301$ (en $b = 9$ uiteraard)

b. We gaan gebruik maken van de regel ${}^{g}log\ (a) = \frac{log\ (a)}{log\ (g)}$ $\{ {}^{8}log\ (20) = \frac{log\ (20)}{log\ (8)} \}$

$y = 0{,}25 \cdot ln(3t) = 0{,}25 \cdot \frac{log(3t)}{log(e)} = \frac{0{,}25 \cdot log(3t)}{0{,}434..} = 0{,}576 \cdot log(3t)$

VOORBEELD 2

a. Schrijf de formule $t = 4 \cdot log(y) - 10$ om in de vorm $y = b \cdot g^t$
b. Schrijf de formule $t = 4 \cdot ln(y) - 10$ om in de vorm $y = b \cdot g^t$
c. Schrijf de formule $log(y) = 2 + 5 \cdot log(x)$ om in de vorm $y = a \cdot x^n$

OPLOSSING 2

Maak gebruik van de regel : ${}^{g}log(g)^t = t$

a. $t = 4 \cdot log(y) - 10$
$4log(y) = t + 10$
$log(y) = 0{,}25t + 2{,}5$
$log(y) = log(10^{0{,}25t + 2{,}5})$
$y = 10^{0{,}25t + 2{,}5}$
$y = 10^{0{,}25t} \cdot 10^{2{,}5}$
$y = 316{,}23 \cdot (10^{0{,}25})^t$
$y = 316{,}23 \cdot 1{,}78^t$

b. $t = 4 \cdot ln(y) - 10$
$4ln(y) = t + 10$
$ln(y) = 0{,}25t + 2{,}5$
$ln(y) = ln(e^{0{,}25t + 2{,}5})$
$y = e^{0{,}25t + 2{,}5}$
$y = e^{0{,}25t} \cdot e^{2{,}5}$
$y = 12{,}18 \cdot (e^{0{,}25})^t$
$y = 12{,}18 \cdot 1{,}28^t$

c. $log(y) = 2 + 5 \cdot log(x)$
$log(y) = log(10^2) + log(x^5)$
$log(y) = log(10^2 \cdot x^5)$
$y = 10^2 \cdot x^5$
$y = 100\,x^5$